ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ TUYẾN

CẬN DƯỚI CHO GIÁ TRỊ KỲ DỊ NHỎ NHẤT CỦA MA TRẬN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ TUYẾN

CẬN DƯỚI CHO GIÁ TRỊ KỲ DỊ NHỎ NHẤT CỦA MA TRẬN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGUYỄN THANH SƠN

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục ký hiệu

Mở đầu **1**

1 Kiến thức chung về ma trận **4**

1.1 Ma trận 4

1.1.1 Định nghĩa ma trận 4

1.1.2 Ma trận trực giao 5

1.2 Véc tơ riêng, giá trị riêng 6

1.3 Chuẩn của véc tơ và chuẩn của ma trận 7

1.4 Khai triển SVD (singular value decomposition) của ma trận . . . 10

2 Một số cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận hằng **14**

2.1 Cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận đường chéo trội . 14

2.2 Cận dưới cho giá trị kỳ dị của H - ma trận 19

3 Cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận phụ thuộc tham số **24**

3.1 Ma trận affine bức 24

3.2 Cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận bức affine 25

3.3 Ví dụ 27

Kết luận **29**

Tài liệu tham khảo 30

Danh mục ký hiệu

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{R}^{n\times m}$	tập các ma trận thực cỡ $n \times m$
a_{ij}	phần tử nằm trên dòng i, cột j
A^T	ma trận chuyển của ma trận A
A^{-1}	ma trận nghịch đảo của ma trận A
SVD	phân tích giá trị kỳ dị
$\|x\|$	chuẩn của véc tơ x
$\|A\|$	chuẩn của ma trận A
$\sigma_i(A), i = 1,2,\cdots,n$	tập hợp các giá trị kỳ dị của ma trận A
$\lambda_i(A), i = 1,2,\cdots,n$	tập hợp các giá trị riêng của A
$\overset{\circ}{R}{}^n_+$	kí hiệu phần trong của không gian R^n_+
$\overline{U}_A$	bao đóng của U
$\|A\|$	định thức của ma trận A

Mở đầu

Giá trị kỳ dị của ma trận không chỉ đóng vai trò quan trọng trong toán học lý thuyết mà còn đối với toán học ứng dụng. Trong toán học tính toán nó là một phần cấu thành *số điều kiện* của ma trận. Đây là đại lượng quyết định tính ổn định hay không ổn định của thuật toán. Nếu ta tìm được cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận thì ta đã tìm được một cận trên cho số điều kiện của ma trận. Đó là đại lượng không thể thiếu trong các đánh giá sai số.

Thật vậy, hãy xét hệ phương trình tuyến tính n ẩn số,

$$Ax = b. \tag{1}$$

Xin lưu ý rằng đây hầu như vẫn là bài toán quan trọng bậc nhất trong toán học tính toán vì để ra được kết quả cuối cùng, gần như mọi bài toán đều quy về hoặc liên quan đến giải hệ phương trình tuyến tính. Vế phải và ma trận hệ số của (1) thường thu được do quá trình đo đạc ngoài thực địa hoặc là kết quả của một quá trình tính toán xấp xỉ trước đó. Dù bằng cách nào, A và b không thể tránh khỏi những sai số mà ta lần lượt ký hiệu là $\Delta A, \delta b$. Như vậy đáng ra, ta có hệ (1) nhưng thực tế, ta lại có hệ

$$(A + \Delta A)\tilde{x} = b + \delta b. \tag{2}$$

Điều chúng ta quan tâm ở đây là $\tilde{x}$ cách x bao xa hay là độ lớn của sai số. Người ta đã chỉ ra rằng nếu $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ và $b \neq 0$ thì

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond }(A)}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right), \tag{3}$$

trong đó, $\text{cond(A)} = \|A\|\,\left\|A^{-1}\right\|$ là số điều kiện của ma trận A. Bất đẳng thức (3) chỉ ra rằng, sai số tương đối của nghiệm bị chặn trên bởi một đại lượng phụ thuộc vào sai số tương đối của dữ liệu (tất nhiên!) và vào bản thân ma trận hệ số. Ta cũng sẽ thấy rằng,

$$\text{cond (A)} = \|A\|\,\left\|A^{-1}\right\| = \sigma_1(A)\frac{1}{\sigma_n(A)},$$

trong đó, $\sigma_1(A)$ và $\sigma_n(A)$ lần lượt là giá trị kỳ dị lớn nhất và nhỏ nhất của ma trận A. Nếu ta tìm được cận dưới dương $\alpha \le \sigma_n(A)$ thì ta có

$$\text{cond(A)} = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)} \le \frac{\sigma_1(A)}{\alpha}. \tag{4}$$

Thay (4) vào (3), ta thu được một cận trên mới cho sai số tương đối.

Ngoài ra, tìm cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận phụ thuộc tham số cũng đóng vai trò quan trọng trong phương pháp giảm cơ sở. Xin xem [3] và [5] để biết thêm chi tiết.

Chính vì tầm quan trọng của vấn đề, chúng tôi quyết định chọn đó làm đề tài luận văn thạc sĩ. Để làm rõ chủ đề này, luận văn của chúng tôi bao gồm những phần sau.

Chương 1. Chúng tôi trình bày một số kiến thức chung về ma trận như khái niệm về ma trận, ma trận đơn vị, ma trận trực giao, véc tơ riêng, giá trị riêng, chuẩn của véc tơ và chuẩn của ma trận, đặc biệt là dạng khai triển giá trị kỳ dị SVD của ma trận. Đó đều là những kiến thức cơ bản, làm cơ sở nghiên cứu chương sau.

Chương 2. Chúng tôi trình bày về một số cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận hằng. Trước tiên, chúng tôi sẽ trình bày một vài kết quả liên quan đến cận dưới cho chuẩn của ma trận nghịch đảo. Sau đó, dựa vào mối quan hệ của chuẩn của ma trận nghịch đảo và giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận ta thu được cận dưới cho giá trị kỳ dị của hai lớp ma trận đặc biệt: ma trận đường chéo trội và $H-$ma trận. Cuối cùng, chúng tôi đưa hai ví dụ để minh họa cho các cận tìm được.

Chương 3. Chúng tôi sẽ trình bày một kết quả về cận dưới cho giá trị kỳ dị nhỏ nhất của ma trận phụ thuộc tham số cùng với nó là một ví dụ minh họa. Trong các ví dụ ở cả 2 chương, chúng tôi đều sử dụng MATLAB như một phần mềm để tính toán và minh họa kết quả.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành, sâu sắc tới TS. Nguyễn Thanh Sơn. Thầy là người trực tiếp hướng dẫn, tận tình chỉ bảo, giúp đỡ và động viên tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng Sau Đại học, quý thầy cô trong khoa Toán - Tin, các bạn học viên lớp cao học Toán 8a đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Qua đây, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới người thân trong gia đình, bạn bè đã luôn động viên khích lệ tôi trong suốt quá trình hoàn thành khóa học.

Thái Nguyên, ngày 7 tháng 7 năm 2016

Tác giả

Bùi Thị Tuyến

Chương 1

Kiến thức chung về ma trận

Để phục vụ cho Chương 2, ta sẽ nhắc lại một số kiến thức cơ bản giúp cho việc trình bày nội dung của Chương 2 được rõ ràng. Trước hết, ta nhắc lại các khái niệm về ma trận. Chương này được viết chủ yếu dựa vào tài liệu [1, 2, 4].

1.1 Ma trận

1.1.1 Định nghĩa ma trận

Định nghĩa 1.1. Ma trận một bảng gồm $m \times n$ số thực được sắp xếp thành m dòng, n cột và gọi là ma trận cấp $m \times n$. Ký hiệu ma trận là,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

hoặc

$$A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Trong đó, a_{ij} là phần tử của ma trận nằm trên dòng i, cột $j, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. Các phần tử a_{ii} gọi là phần tử nằm trên đường chéo chính.

Nếu $m = n$ thì A được gọi là một ma trận vuông.

Định nghĩa 1.2. Ma trận đơn vị là ma trận vuông có mọi phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử khác bằng 0 và có dạng sau

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.3. Ma trận đường chéo là ma trận vuông có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.

Ta đặc biệt quan tâm đến lớp ma trận đường chéo vuông. Ma trận đường chéo có dạng,

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.4. Ma trận chuyển vị là một ma trận ở đó các hàng được thay thế bằng các cột và ngược lại. Ma trận chuyển vị của ma trận A được kí hiệu là A^T.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nếu A là một ma trận có kích thước $m \times n$ với các giá trị a_{ij} tại hàng i, cột j thì ma trận chuyển vị $B = A^T$ là ma trận có kích thước $n \times m$ với các giá trị $b_{ij} = a_{ji}$.

Định nghĩa 1.5. Ma trận A được gọi là ma trận đối xứng nếu $A^T = A$. Ma trận đối xứng A được gọi là xác định dương (nửa xác định dương) nếu $x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$ $(x^T Ax \geq 0)$.

1.1.2 Ma trận trực giao

Định nghĩa 1.6. Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu,

$$A^T A = I,$$

hay dưới dạng biểu thức,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \sigma_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

trong đó, σ_{ij} là kí hiệu Kronecker.

Tính chất 1.7. • Ma trận trực giao A là khả nghịch và có $A^{-1} = A^T$.

- Ma trận A trực giao khi và chỉ khi các vec tơ cột và các hàng của A tạo thành các hệ trực chuẩn.

- Ta có
$$|A^T A| = |I| = 1 \to |A| = \pm 1.$$

1.2 Véc tơ riêng, giá trị riêng

Định nghĩa 1.8. Cho A là ma trận vuông cấp n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó, nếu có véc tơ x khác không và số λ sao cho $Ax = \lambda x$ thì ta nói λ là một giá trị riêng của A và x là một véc tơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng λ.

Như đã biết, giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận thực có thể là phức. Tuy nhiên, nếu A là ma trận đối xứng thì các giá trị riêng và kéo theo là các véc tơ riêng luôn là thực.

Ta nhắc lại ở đây một kết quả quan trọng của đại số tuyến tính. Đó chính là Định lý Courant-Fischer. Để tiện cho việc hiểu và vận dụng, chúng tôi trích một phần của định lý. Phát biểu đầy đủ và chứng minh của định lý có thể tìm thấy trong [4].

Định lý 1.9. *(Định lý 4.2.6, [4])*
Giả sử A là ma trận thực đối xứng cấp n. Gọi $\lambda_n(A)$ là giá trị riêng nhỏ nhất theo nghĩa đại số của nó. Khi đó,

$$\lambda_n(A) = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Từ định lý này, ta suy ra ngay một hệ quả sau.

Hệ quả 1.10. Nếu A là một ma trận đối xứng xác định dương (nửa xác định dương) thì các giá trị riêng của nó đều dương (không âm).